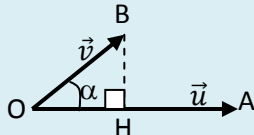
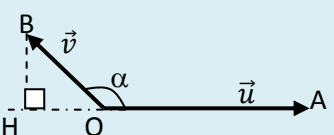


Niveau : Terminale bac pro

Durée : 4 h

Objectifs	
Objectif général	Découvrir et utiliser le produit scalaire
Connaissances	Définition du produit scalaire de deux vecteurs. Formules exprimant $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$ en fonction de $\cos a$, $\cos b$, $\sin a$, $\sin b$. Propriétés du produit scalaire de deux vecteurs : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, $\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v}$, $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ Vecteurs orthogonaux.
Capacités mathématiques	Utiliser les trois expressions du produit scalaire de deux vecteurs pour déterminer des longueurs et des angles. Reconnaitre des vecteurs orthogonaux, à l'aide de leurs coordonnées dans un repère orthonormal.
Attitudes transversales	Le goût de chercher et de raisonner. La rigueur et la précision.
Capacités cognitives	Capacité de représentation (donner du sens aux vecteurs et au produit scalaire). Flexibilité mentale (par le changement de cadre et de présentation).

Dérroulement	
Etape 1 Introduction Phase magistrale Support : Tableau	Le produit scalaire est une opération qui s'applique aux vecteurs. Il constitue un outil qui facilite le travail dans de nombreuses applications. En mathématiques, il permet de déterminer des longueurs, des angles ou le caractère perpendiculaire de deux droites. En physiques, il est utilisé pour modéliser le travail et la puissance d'une force ou encore la puissance en courant alternatif.
Etape 2 Activité d'approche calculatoire Orthogonalité Source Math'x-Didier <i>Introduction à l'expression analytique du produit scalaire</i> Phase individuelle Support : élève/cahier	On considère un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. 1- Soit les points A(3, 4) et B(-1, 1). Le triangle OAB est-il rectangle en O ? <i>On attend que l'élève utilise le théorème de Pythagore. Dans ce cas : $OA^2 + OB^2 \neq AB^2$.</i> 2- Condition d'orthogonalité Soit M(x, y) et N(x', y') deux points distincts de O. a) Ecrire une condition nécessaire et suffisante sur $OM^2 + ON^2 - MN^2$ pour que le triangle OMN soit rectangle en O. <i>Réciproque du théorème de Pythagore : $OM^2 + ON^2 - MN^2 = 0$</i> b) Exprimer $OM^2 + ON^2 - MN^2$ en fonction de x, y, x', et y'. <i>$(x^2 + y^2) + (x'^2 + y'^2) - ((x' - x)^2 + (y' - y)^2) = xx' + yy$ (après développement et simplification).</i> c) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur x, y, x', et y' pour que OMN rectangle en O. <i>$xx' + yy = 0$. L'expression $xx' + yy$ est appelée produit scalaire de $\vec{OM}$ et $\vec{ON}$.</i>
Etape 3 Activité d'approche Observation avec TIC Source Math'x-Didier <i>1- Signe du produit scalaire</i> <i>2- Introduction à l'expression du produit scalaire avec le projeté orthogonal</i> Phase individuelle Support : élève/cahier + logiciel de géométrie (GeoGebra)	1.1. Créer 3 points A, B et C puis les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$. Créer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ (saisir p = u*v dans la zone de saisie). 1.2. Déplacer le point C et observer le signe de $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$. Emettre une conjecture. Déplacer A, B et C pour tester la conjecture. <i>On attend une conjecture du type : si l'angle $\widehat{BAC} < 90^\circ$ alors $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ est positif, si l'angle $\widehat{BAC} > 90^\circ$ alors $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ est négatif. Si l'angle $\widehat{BAC} = 90^\circ$ alors $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ est nul.</i> 2.1- Placer A et B sur l'axe des abscisses du repère et tels que AB = 6. Cacher les axes et faire apparaître la grille. 2.2- Conjecturer une expression du produit scalaire en fonction de AB et AC quand C appartient à la droite (AB). <i>On attend une conjecture du type $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC$ si C appartient à [AB] et $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AB \times AC$ si C n'appartient pas à [AB].</i> 2.3- Trouver un point C sur (AB) tel que $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 24$. Trouver d'autres points C du plan tels que $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 24$. Où semblent être situés les points trouvés ? Conjecturer l'ensemble des points C. <i>On attend une conjecture du type l'ensemble des points C est la droite perpendiculaire à (AB) et coupant [AB] en C' tel que AC' = 4.</i> 2.4- Conjecturer de même l'ensemble des points C tels que $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -12$. <i>Conjecture : droite perpendiculaire à (AB) et coupant [BA] en C' tel que AC' = 2 et BC' = 8.</i> 2.5- Proposer une nouvelle manière de calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$. La tester sur le logiciel en déplaçant A, B et C. <i>On attend : si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) alors $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AH$ si H appartient [AB] et $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AB \times AH$ si H n'appartient pas à [AB].</i>

Etape 4 Cours Définitions (3 expressions)	Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est un nombre réel. Expression analytique : soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ Expression avec le projeté : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls alors : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \ \vec{u}\ \times \ \vec{v}\ \times \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})})$  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{OA} \times \overline{OH} = OA \times OH$  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{OA} \times \overline{OH} = -OA \times OH$ Expression avec les normes : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\ \vec{u} + \vec{v}\ ^2 - \ \vec{u}\ ^2 - \ \vec{v}\ ^2)$
Propriétés	Commutativité : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ Soit α un réel : $\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v}$ Distributivité sur l'addition : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
Carré scalaire	$\vec{u} \cdot \vec{u}$ est appelé carré scalaire de $\vec{u}$ et noté $\vec{u}^2$. Propriété : $\vec{u}^2 = \ \vec{u}\ ^2$
Orthogonalité	Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul. (Deux vecteurs orthogonaux non nuls ont des directions perpendiculaires.)
Colinéarité	Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leur produit scalaire est égal au produit de leurs longueurs. (Deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires si les points O, A et B sont sur une même droite.)
Angle géométrique Phase magistrale Support : Prof/Tableau Elève/cahier	Si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont deux vecteurs non nuls, alors l'angle $\widehat{AOB}$ se déduit de l'égalité $\cos \widehat{AOB} = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{OA \times OB}$.
Etape 5 Exercices Phase individuelle Support : élève/cahier	- Calculer le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans les deux cas suivants. a) $\ \vec{u}\ = 7$; $\ \vec{v}\ = 5$; $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = 45^\circ$ b) $\ \vec{u}\ = 0,5$; $\ \vec{v}\ = 1,2$; $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \frac{\pi}{3}$ rad - On considère un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. a) Développer l'expression $(\vec{i} + \vec{j}) \cdot (\vec{i} - \vec{j})$. b) Quelle propriété géométrique des vecteurs $\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{i} - \vec{j}$ en déduit-on ? - Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux de normes respectives 4 et 5. Calculer $(\vec{u} + \vec{v})^2$; $(\vec{u} - \vec{v})^2$; $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$ - Développer puis transformer l'expression $(\vec{u} + \vec{v})^2$ pour retrouver l'expression du produit scalaire avec les normes.
Etape 6 Exercices d'applications 1-Formule d'Al-Kashi 2-Equation du cercle 3-Formules d'addition Phase individuelle Support : élève/cahier	- Le théorème d'Al-Kashi ou théorème de Pythagore généralisé relie dans un triangle, la longueur d'un côté à celles des deux autres et au cosinus de l'angle formé par ces deux côtés : Ainsi dans le triangle ABC ci-contre : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$ Justifier cette égalité en développant l'expression $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$, expression que l'on justifiera au préalable. - Dans un repère orthonormé du plan, on considère les points A(3 ; 2) et B(-4 ; 1) et le cercle C de diamètre [AB]. a) Effectuer une figure. b) On considère un point M(x ; y) du cercle C. Calculer, en fonction de x et y, les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$. Ecrire puis développer l'expression du produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$. c) Quelle est la nature du triangle MAB ? Qu'en déduit-on du produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$? d) Les coordonnées de tout point M du cercle C sont donc solution de l'équation $x^2 + y^2 + x - 3y - 10 = 0$ appelée équation du cercle. Vérifier que les coordonnées des points A et B sont solutions de cette équation. Déterminer, par le calcul, l'ordonnée du point M si x = 1. - Réaliser une figure en plaçant sur un cercle trigonométrique deux points A et B ayant pour image respective les nombres a et b puis en faisant apparaître l'angle de mesure a - b. - Utiliser deux des trois expressions du produit scalaire pour exprimer $\cos(a - b)$ en fonction de $\cos a$, $\cos b$, $\sin a$, $\sin b$. - En déduire les formules de $\cos(a + b)$ et $\sin(a + b)$ en fonction de $\cos a$, $\cos b$, $\sin a$, $\sin b$. NB : $\cos(a + b) = \cos(a - (-b))$; $\sin(a + b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a + b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right)$